

TEMA 1

MAGNETOSTÁTICA EN EL VACÍO

1. Campos magnéticos estáticos

Se ha demostrado experimentalmente que cuando la carga de prueba está en movimiento en un campo magnético \vec{B} (densidad de flujo magnético, inducción magnética), la carga q experimenta una fuerza magnética \vec{F}_m , dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\vec{F}_m &= q\vec{v}\times\vec{B} \text{ (N)} \\ \vec{v} &\rightarrow \text{velocidad de la carga en movimiento} \\ \vec{B} &\rightarrow \text{Webers/m}^2 \text{ (Wb/m}^2\text{)} \text{ ó Teslas (T)}\end{aligned}\tag{1.1}$$

La fuerza electromagnética total sobre una carga q , viene dada por la ley de Lorentz

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) \quad \text{(N)}\tag{1.2}$$

Los dos postulados para la magnetostática en el espacio libre son los siguientes:

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{B} &= 0 \\ \nabla\times\vec{B} &= \mu_0\vec{J} \quad \rightarrow \text{campo solenoidal (líneas } \vec{B} \text{ cerradas)}\end{aligned}\tag{1.3}$$

μ_0 (permeabilidad en el espacio libre) = $4\pi \times 10^{-7}$ (H/m)

Todas las relaciones de la magnetostática en el espacio libre (ley circuital de Ampere, ley de Biot-Savart,...) pueden ser deducidas de las ecuaciones anteriores ($\nabla\cdot\vec{B}$ y $\nabla\times\vec{B}$).

2. Potencial vectorial magnético

De las ecuaciones $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ y $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J}$ y teniendo en cuenta el teorema de Helmholtz,

se deduce que el campo \vec{B} puede calcularse como el rotacional de un potencial vectorial:

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{v'} \frac{\nabla \cdot \vec{B} dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = 0 \\ \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{v'} \frac{\nabla \times \vec{B}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\vec{J}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (\text{Wb/m}) \quad (2.1) \\ \vec{B} &= -\nabla\phi + \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \vec{A}\end{aligned}$$

En muchas aplicaciones, nos interesa determinar el campo \vec{B} (y por lo tanto \vec{A}) debido a un circuito por el que circula una corriente. En el caso de un hilo delgado con sección transversal s , dv' es igual a sdl' , por lo tanto se verifican las siguientes identidades:

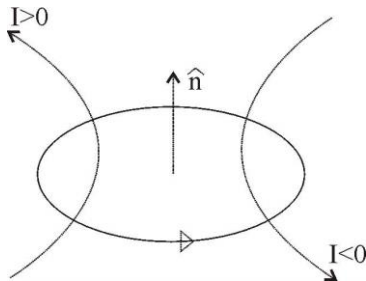
$$\vec{J} dv' = Jsd\vec{l}' = Id\vec{l}' \quad (2.2)$$

El potencial vectorial para este caso (corriente en circuito cerrado) viene dado por la expresión:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{c'} \frac{d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (\text{Wb/m}) \quad (2.3)$$

“LEY CIRCUITAL DE AMPERE”

Integrando ambos miembros de la ecuación $\nabla \times \vec{B}$ sobre una superficie abierta \underline{s} y luego aplicando el teorema de Stokes:



$$\int_s (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_s \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

Teniendo en cuenta que $\int_s \vec{J} \cdot d\vec{s} = I$

Se obtiene $\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ (2.4)

$c \rightarrow$ contorno que limita la superficie \underline{s}
 $I \rightarrow$ corriente total a través de \underline{s}

Integrando $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ sobre un volumen \underline{v} se obtiene,

$$\int_v \nabla \cdot \vec{B} \cdot dv = 0$$

Aplicando el teorema de la divergencia

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$$

$s \rightarrow$ superficie cerrada que limita el volumen v

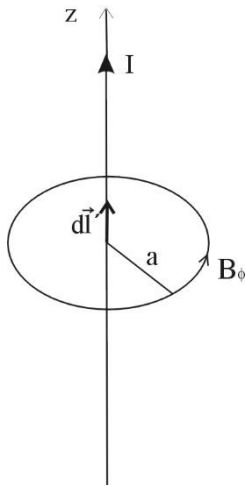
Se puede calcular el flujo del campo \vec{B} a través de un área \underline{s} limitada por un contorno \underline{c} :

$$\Phi = \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_s (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} = \oint_c \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (Wb) \quad (2.5)$$

La ley circuital de Ampere es muy útil para determinar la densidad de flujo magnético \vec{B} generada por una corriente I cuando hay una trayectoria cerrada \underline{c} alrededor de la corriente donde la magnitud de \vec{B} es constante.

Ejemplo: Cálculo de \vec{B} producido por una línea de corriente constante I y de longitud infinita en la dirección z .

Por la regla de la mano derecha sabemos que \vec{B} está en la dirección ϕ .

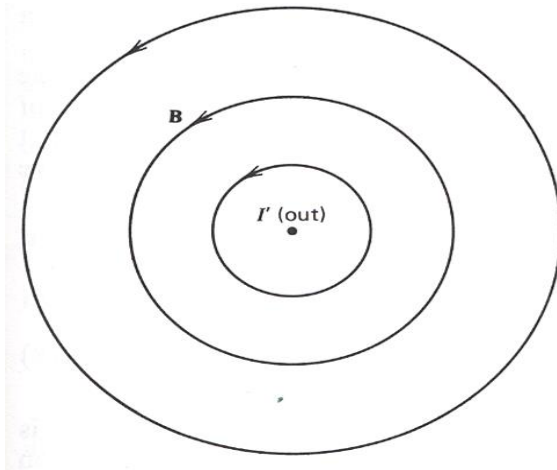


Por simetría, la magnitud de \vec{B} es constante alrededor de un lazo amperiano de radio a , centrado en la línea:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_\phi \oint_c dl = B_\phi 2\pi a = \mu_0 I$$

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{\phi} \quad (\text{T})$$

Líneas de campo:



- Corriente saliendo del plano de la página
- Son líneas cerradas, de acuerdo con $\nabla \cdot \vec{B} = 0$
- La dirección de rotación (eje de rotación) viene dado por $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{J}$

Postulados de la magnetostática en medios no magnéticos	
<i>Forma diferencial</i>	<i>Forma integral</i>
$\nabla \cdot \vec{B} = 0$ $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$	$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$ $\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

3. Ley de Biot-Savart

Calculemos ahora el campo \vec{B} generado por una corriente I en una trayectoria cerrada c' . Para ello, basta con calcular el rotacional de la expresión anterior (potencial vectorial debido a una corriente en circuito cerrado).

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \nabla \times \left[\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{c'} \frac{d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \quad (3.1)$$

Es muy importante observar que en la ecuación anterior la operación de rotacional “sin prima” implica la diferenciación con respecto a las coordenadas espaciales del punto campo, mientras que la operación de integración es con respecto a las coordenadas fuente “con prima”. El integrando de la ecuación anterior, puede desarrollarse en dos términos usando la siguiente identidad vectorial:

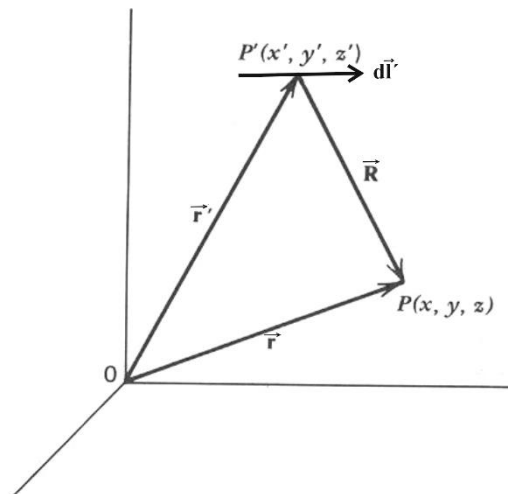
$$\nabla \times (f \vec{G}) = f \nabla \times \vec{G} + (\nabla f) \times \vec{G}$$

con $f = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ y $\vec{G} = d\vec{l}'$, se obtiene (3.2)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{c'} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \cancel{\nabla \times d\vec{l}'} + \nabla \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times d\vec{l}' \right]$$

Dado que las coordenadas “con” y “sin” prima son independientes, se puede concluir que $\nabla \times d\vec{l}' = 0$.

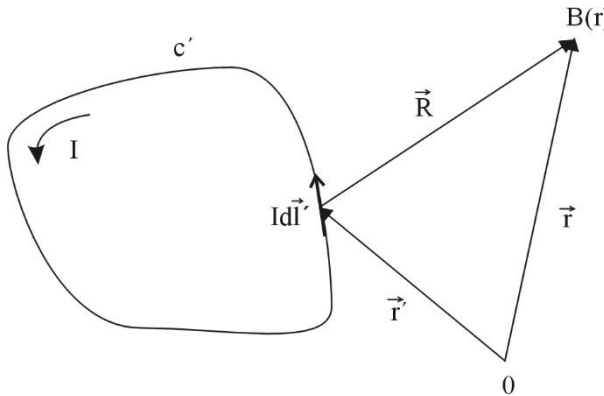
La distancia $|\vec{r} - \vec{r}'|$ se mide desde $d\vec{l}'$ situado en (x', y', z') hasta el punto campo situado en (x, y, z) .



$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} &= \frac{1}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{1/2}} = \frac{1}{R} \\
\nabla \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \hat{y} \\
&+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \hat{z} \\
&= - \frac{(x-x')\hat{x} + (y-y')\hat{y} + (z-z')\hat{z}}{\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 \right]^{3/2}} = - \frac{\vec{R}}{R^3} = - \frac{1}{R^2} \hat{R}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$\hat{R} \rightarrow$ Vector unitario desde el punto fuente al punto campo

Por lo tanto la expresión para el campo \vec{B} es la siguiente:



$$\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{c'} \frac{d\vec{l}' \times \hat{R}}{R^2} \quad (\text{T}) \\
R &= |\vec{r} - \vec{r}'|
\end{aligned} \tag{3.4}$$

La ecuación anterior se conoce como la ley de Biot-Savart y nos permite calcular el campo \vec{B} (inducción magnética, densidad de flujo magnético, campo magnético) generado por una corriente I en una trayectoria cerrada c' .

Para el caso de una distribución volumétrica de corriente \vec{J} , la ley de Biot-Savart sería la siguiente:

$$\begin{aligned}
\vec{B}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\vec{J} \times \hat{R}}{R^2} dv' \quad (\text{T}) \\
R &= |\vec{r} - \vec{r}'|
\end{aligned} \tag{3.5}$$

donde se ha tenido en cuenta la equivalencia:

$$Id\vec{l}' = \vec{J}dv'$$

4. Fuerzas sobre los conductores por los que circulan corrientes

Teniendo en cuenta que la fuerza magnética sobre un elemento de carga dq que se mueve con una velocidad \vec{v} en presencia de un campo \vec{B} viene dada por la Ley de Lorentz ($d\vec{F}_m = dq(\vec{v} \times \vec{B})$), la fuerza magnética sobre un segmento de corriente vendrá dada por la siguiente expresión:

$$\vec{F}_m = \int_l (\vec{V} \times \vec{B}) dq, \text{ sustituyendo } dq \text{ por } \rho_l dl \text{ se obtiene:}$$

$$\int_l (\vec{V} \times \vec{B}) \rho_l dl \text{ expresión que adopta la siguiente forma (*):}$$

$$\int_l (\vec{I} \times \vec{B}) dl \tag{4.1}$$

donde se ha sustituido $\rho_l \vec{V}$ por \vec{I}

Como \vec{I} y $d\vec{l}$ tienen la misma dirección

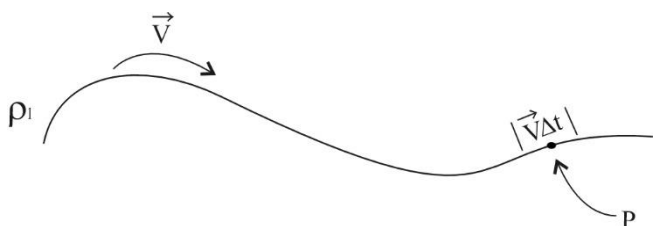
$$\vec{F}_m = \int_l I (d\vec{l} \times \vec{B})$$

Teniendo en cuenta que $I = \text{constante}$,

$$\vec{F}_m = I \int_l d\vec{l} \times \vec{B} \quad (\text{N}) \tag{4.2}$$

Por lo tanto, la fuerza magnética sobre un circuito completo limitado por un contorno \mathcal{C} , por el que circula una corriente I en presencia de un campo magnético \vec{B} viene dado por la expresión:

$$\vec{F}_m = I \oint_{\mathcal{C}} d\vec{l} \times \vec{B} \tag{4.3}$$

<p>(*) Nota aclaratoria para el desarrollo</p>  <p>El segmento de longitud $V\Delta t$, contiene una carga $\rho_l V\Delta t = \Delta q$ que pasa por el punto P en un intervalo de tiempo Δt.</p>	$\rho_l V\Delta t = \Delta q \Rightarrow \frac{\Delta q}{\Delta t} = \rho_l V$ $\vec{I} = \rho_l \vec{V} \quad (\vec{J} = \rho_v \vec{V})$ <p>La corriente en un hilo es la carga por unidad de tiempo que pasa por un punto dado</p>
--	---

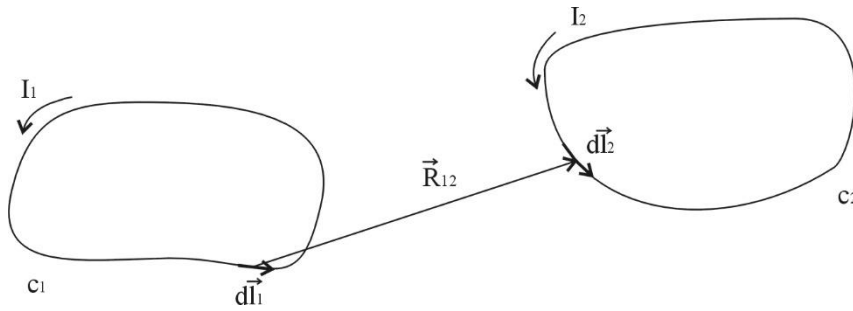
Cuando hay dos circuitos por los que circulan corrientes I_1 e I_2 , la situación es análoga a la de un circuito por el que circula una corriente en presencia del campo magnético creado por el otro. En presencia de un campo \vec{B}_{12} producido por la corriente I_1 circulando por c_1 , la fuerza \vec{F}_{12} sobre el circuito c_2 :

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12} &= I_2 \oint_{c_2} d\vec{l}_2 \times \vec{B}_{12} \\ \vec{B}_{12} &= \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{c_1} \frac{d\vec{l}_1 \times \hat{R}_{12}}{R_{12}^2} \quad (\text{Ley de Biot - Savart})\end{aligned}\quad (4.4)$$

Al combinar las ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{c_2} \oint_{c_1} \frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \hat{R}_{12})}{R_{12}^2} \quad (\text{N}) \quad (4.5)$$

Expresión que se conoce como *Ley de Fuerzas de Ampère*



La fuerza \vec{F}_{21} sobre un circuito c_1 , debido al campo producido por la corriente I_2 circulando por c_2 , puede calcularse intercambiando 1 y 2 en los subíndices, teniendo en cuenta que $\vec{R}_{12} = -\vec{R}_{21}$ y utilizando una expresión análoga a (4.5), pero simétrica, la cual solo sería válida en el caso de un circuito completo (véanse páginas 271 y 272 del Wangsness, en su versión en español). De este modo, se obtendría que $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

Aunque se ha demostrado que la tercera ley de Newton se cumpliría para circuitos completos, dicha ley no aplicaría en el caso de la relación entre elementos de corriente. Esto se debe a que, por lo general, en contraste con la Ley de Coulomb, $d\vec{F}$ entre elementos no vendría expresada mediante una cantidad vectorial cuya dirección sea la línea que une ambos elementos (como puede verse en detalle en las páginas 275 y 276 del Wangsness, versión en español).

5. Movimiento de partículas cargadas en un campo magnético uniforme

Consideramos una partícula de carga q , que se mueve a una velocidad \vec{v} en el seno de un campo magnético externo \vec{B} uniforme.

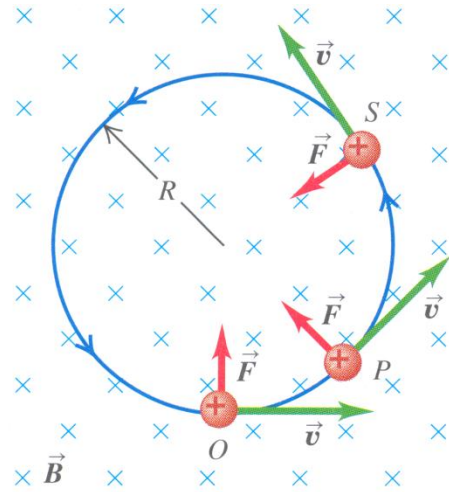
- **Caso particular:** $\vec{v} \perp \vec{B}$

Una carga que se mueve de manera perpendicular (formando ángulos rectos) con respecto a un campo \vec{B} uniforme, lo hace describiendo un círculo a rapidez constante. Ello se debe a la perpendicularidad que los vectores \vec{F} y \vec{v} presentan entre sí.

$$|\vec{F}| = |q|vB = ma_c = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{|q|B}$$

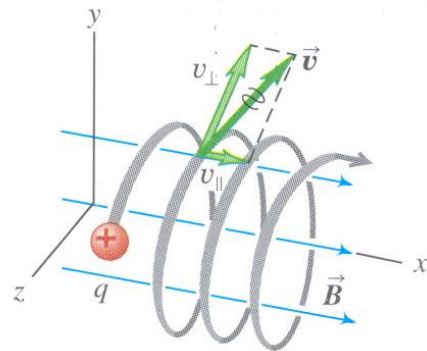
$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{|q|B}{m}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{|q|B}{2\pi m} \text{ (frec. ciclotrón)}$$



- **Caso general:**

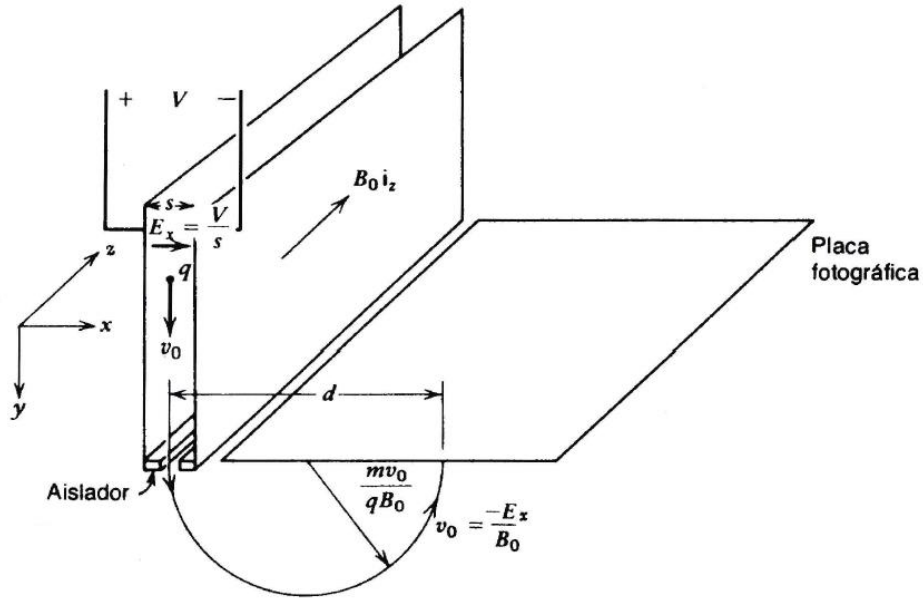
El movimiento de esta partícula tiene componentes tanto paralelos (\vec{v}_{\parallel}) como perpendiculares (\vec{v}_{\perp}) al campo magnético, por lo que se mueve en una trayectoria helicoidal.



Aplicaciones prácticas

→ Espectrógrafo de masas

El espectrógrafo de masas mide la masa de un ion por el radio de su trayectoria al moverse en forma perpendicular a un campo magnético. El campo eléctrico uniforme transversal selecciona la velocidad del ion que puede pasar a través de la ranura.



La fuerza neta aplicada sobre la carga vendrá dada por

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Determinando los vectores por las condiciones del problema

$$\vec{v} = v_y \hat{y}$$

$$\vec{B} = B_z \hat{z}$$

$$\vec{v} \times \vec{B} = v_y B_z (\hat{y} \times \hat{z}) = v_y B_z \hat{x}$$

Una vez hecho esto, y tomando en consideración que las cargas que puedan atravesar la angosta ranura que presenta el aislador no han sufrido deflexiones por acción de los campos (i.e., la fuerza neta sufrida por la carga es nula), puede determinarse el valor del campo \vec{E} de manera directa, ya que $q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = 0$.

Por lo tanto el campo eléctrico llevará dirección en el eje x

$$E_x = \frac{V}{s} = -v_0 B_0$$

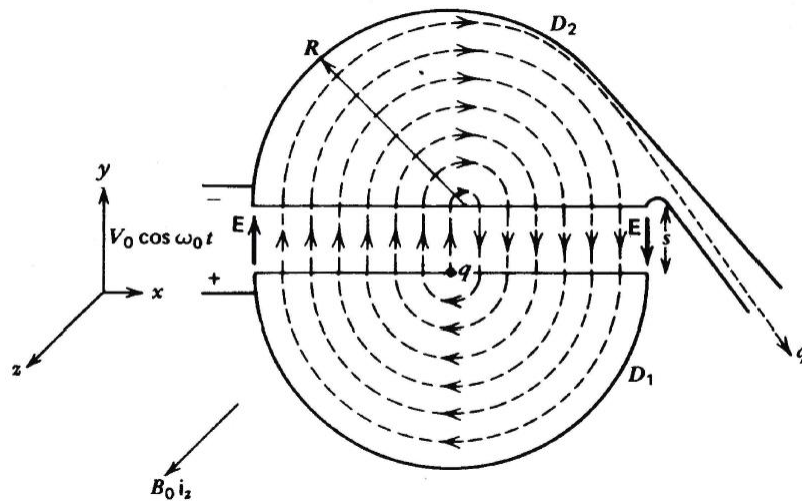
donde v_0 vendrá a ser la velocidad seleccionada a la que se mueven las cargas que han podido pasar a través de la mencionada ranura.

Tras ello, esta carga dejará de estar bajo la influencia del campo eléctrico y, debido al campo magnético que sigue sufriendo, describirá una circunferencia cuyo radio vendrá determinado de la siguiente manera:

$$r = \frac{v_0}{\omega_0} = \frac{v_0 m}{q B_0}$$

→ Ciclotrón

El ciclotrón imprime altas velocidades a los iones, mediante muchas pequeñas aceleraciones repetidas con el campo eléctrico que existe entre las Des. Dentro de las Des el campo eléctrico es despreciable, de modo que los iones se mueven en órbitas circulares cada vez más grandes, debido a un campo magnético aplicado perpendicularmente a su movimiento.



Una fuente de carga en el centro de D_1 emite una carga q con masa m y velocidad nula en $t = 0$. El campo eléctrico en el espacio entre Des acelera la carga hacia D_2 . Por tanto, mediante la fuerza eléctrica que sufre podremos calcular su velocidad según

$$m \frac{dv_y}{dt} = \frac{qV_0}{s},$$

resultando dicha velocidad (en función del tiempo)

$$v_y = \frac{qV_0}{sm} t.$$

Por otro lado, tendremos que

$$v_y = \frac{dy}{dt},$$

con lo cual, vemos que

$$y = \frac{qV_0 t^2}{2sm}.$$

Ahora, para el cálculo del tiempo que le lleva transitar de D_1 a D_2 sólo nos resta identificar $y = s$, con lo cual

$$s = \frac{qV_0 t^2}{2sm} \rightarrow t = \sqrt{\frac{2ms^2}{qV_0}}$$

Por lo tanto, sustituyendo en la expresión de la velocidad, tenemos que

$$v_y = \frac{qV_0}{sm} \cdot \sqrt{\frac{2ms^2}{qV_0}} = \sqrt{\frac{2qV_0}{m}}$$

De las condiciones del problema puede inferirse directamente que cada vez que la carga cruza el espacio, su velocidad aumenta en la misma cantidad. Es por ello que, tras n pasos por el espacio entre Des, su velocidad vendrá determinada por

$$nqV_0 = \frac{1}{2}mv_n^2 \rightarrow v_n = \sqrt{\frac{2qnV_0}{m}}$$

Por otro lado, sabiendo que $\omega_0 = qB_0/m$

$$R_n = \frac{v_n}{\omega_0} = \sqrt{\frac{2nmV_0}{qB_0^2}}$$

además de que el radio exterior de las Des es R , la máxima rapidez de la carga vendrá dada por

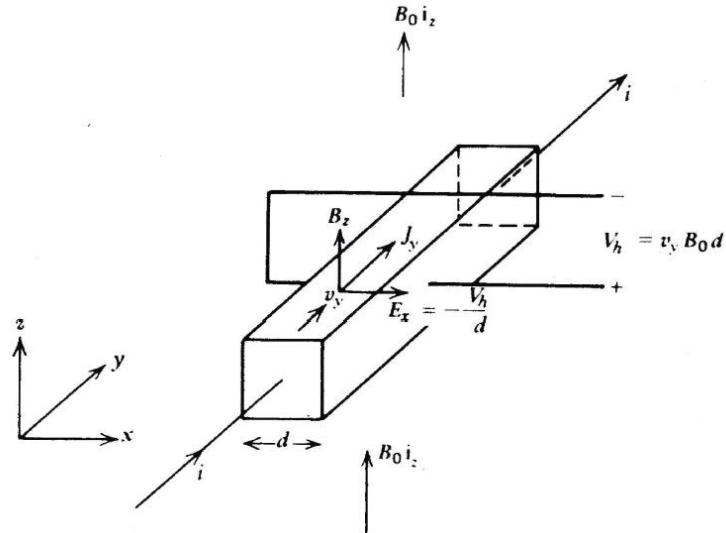
$$v_{max} = \omega_0 R = \frac{qB_0}{m} R$$

y será alcanzada tras $2n = qB_0^2 R^2 / mV_0$ viajes.

Generalmente, no se suele utilizar con electrones debido a que la pequeña masa m_e que presentan, les permite alcanzar velocidades relativistas, próximas a la velocidad de la luz ($v \approx c$), lo que incrementaría enormemente su masa $\left(m_e / \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)$, modificando de este modo su velocidad angular, ya que $\omega_0 = \frac{qB}{m_e}$. Esto provocaría que el movimiento angular que describen quedaría fuera de fase con el voltaje provocando, de este modo, una pérdida de sincronía en el sistema, haciendo que los electrones se encuentren con un campo \vec{E} de signo incorrecto. La única solución aplicable, sería modificar la frecuencia del voltaje aplicado atendiendo a esta variación de velocidad angular.

→ **Efecto Hall**

Un campo magnético perpendicular a un flujo de corriente, deflexiona las cargas en forma transversal dando lugar a un campo eléctrico y al voltaje de Hall. La polaridad del voltaje de Hall tiene el mismo signo que el de los portadores de carga.



Sabemos, por las condiciones del problema, que:

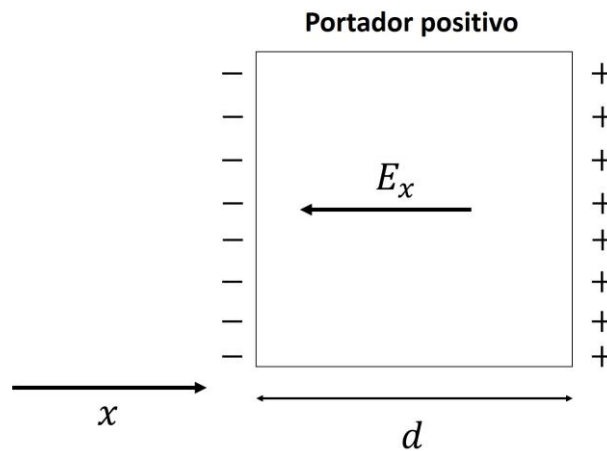
$$\vec{v} = v_y \hat{y} \quad \vec{B} = B_0 \hat{z}$$

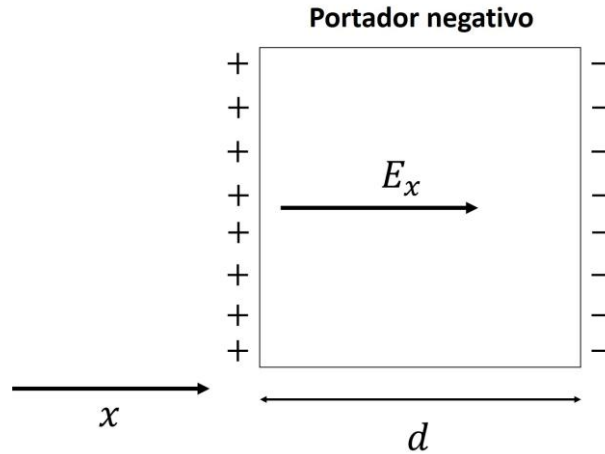
Por lo tanto, podemos determinar

$$\vec{v} \times \vec{B} = v_y B_0 (\hat{y} \times \hat{z}) = v_y B_0 \hat{x}$$

A su vez, debemos tomar en consideración que la fuerza ejercida por el campo magnético sobre un portador de carga crea una fuerza en respuesta del campo eléctrico, dando lugar (a ojos del ya mencionado portador) a una fuerza neta nula, esto es

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0$$





Por lo tanto, podemos obtener el valor de dicho campo \vec{E} como

$$\vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} = -(v_y \hat{y}) \times B_0 \hat{z} = -v_y B_0 (\hat{y} \times \hat{z}) = -v_y B_0 \hat{x}$$

Y mediante su integral de línea podremos determinar esa d.d.p. (Voltaje de Hall) como

$$V_h - 0 = V_h = - \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{x} = - \int_0^d (-v_y B_0 \hat{x}) \cdot (dx \hat{x}) = \int_0^d v_y B_0 dx$$

$$V_h = v_y B_0 d$$

Condiciones de frontera del campo \vec{B} en una superficie de discontinuidad

$$1. \nabla \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \rightarrow B_{n2} - B_{n1} = 0$$

Las componentes normales de \vec{B} son siempre continuas.

$$2. \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \rightarrow \hat{n} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = \lim_{h \rightarrow 0} \mu_0 h \vec{J} = \mu_0 \vec{k}$$

$$\vec{k} = \lim_{h \rightarrow 0} (h \cdot \vec{J})$$

que puede expresarse en términos de las componentes tangenciales. Para ello, teniendo en cuenta la siguiente identidad vectorial:

$$A \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(A \cdot \vec{C}) - \vec{C}(A \cdot \vec{B}),$$

se obtiene que

$$(\hat{n} \times \vec{B}) \times \hat{n} = -[\hat{n} \times (\hat{n} \times \vec{B})] = -[\hat{n} \cdot (\hat{n} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\hat{n} \cdot \hat{n})] = \vec{B} - B_n \hat{n}$$

$$= \hat{B}_t (\vec{B} = B_n \hat{n} + B_t \hat{t}).$$

Por lo tanto,

$$\vec{B}_{t2} - \vec{B}_{t1} = \mu_0 \vec{k} \times \hat{n}.$$

Cálculo de la divergencia de \vec{A}

Para el cálculo de la divergencia de \vec{A} tenemos que

$$\nabla \vec{A} = \nabla \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C'} \frac{I d\vec{l}'}{R} \right) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \nabla \left(\frac{d\vec{l}'}{R} \right),$$

donde $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$.

Teniendo en cuenta que $\nabla(u\vec{F}) = \vec{F}(\nabla u) + u(\nabla\vec{F})$.

Se obtiene que

$$\nabla \left(\frac{d\vec{l}'}{R} \right) = d\vec{l}' \nabla \left(\frac{1}{R} \right) + \frac{1}{R} (\nabla d\vec{l}') = -\nabla' \left(\frac{1}{R} \right) d\vec{l}'$$

donde se ha utilizado que

$$\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\hat{R}}{R^2} = -\nabla' \left(\frac{1}{R} \right).$$

además de que

$$\nabla d\vec{l}' = 0$$

Sustituyendo esta expresión y teniendo en cuenta el teorema de Stokes:

$$\nabla \vec{A} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) d\vec{l}' = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{S'} \left[\nabla' \times \nabla' \left(\frac{1}{R} \right) \right] d\vec{S}' = 0$$

Ya que $\nabla \times (\nabla u) = 0$, la expresión anterior es igualmente válida para más de una corriente fuente.

Nótese que, en general, para una línea finita $\nabla \vec{A} \neq 0$.

Ecuación diferencial para \vec{A}

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \rightarrow \nabla^2 A_x = -\mu_0 J_x, \nabla^2 A_y = -\mu_0 J_y, \nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z.$$

Por lo tanto, cada una de las componentes rectangulares de \vec{A} satisface la ecuación de Poisson.

Indeterminación de \vec{A}

$$\vec{A}^+(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \nabla\psi(\vec{r}) \rightarrow \text{Transformación gauge}$$

$\psi(\vec{r}) \rightarrow$ campo escalar arbitrario

$$\vec{B}^+(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}^+(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}) + \nabla \times \nabla\psi(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r})$$

$$\nabla \vec{A}^+(\vec{r}) = \nabla \vec{A}(\vec{r}) + \nabla \cdot \nabla \psi(\vec{r}) = \nabla^2 \psi(\vec{r})$$

$$\nabla \vec{A}^+(\vec{r}) = 0 \rightarrow \text{gauge de Coulomb}$$

$\nabla^2 \psi(\vec{r}) = 0 \rightarrow$ por lo tanto, $\psi(\vec{r})$ debe verificar la ecuación de Laplace.

Condiciones de frontera de \vec{A}

Aplicando que

$$\nabla \vec{A} = 0 \rightarrow \hat{n} \cdot (\vec{A}_2 - \vec{A}_1) = 0 \rightarrow A_{n2} - A_{n1} = 0,$$

podemos concluir que las componentes normales de \vec{A} son continuas.

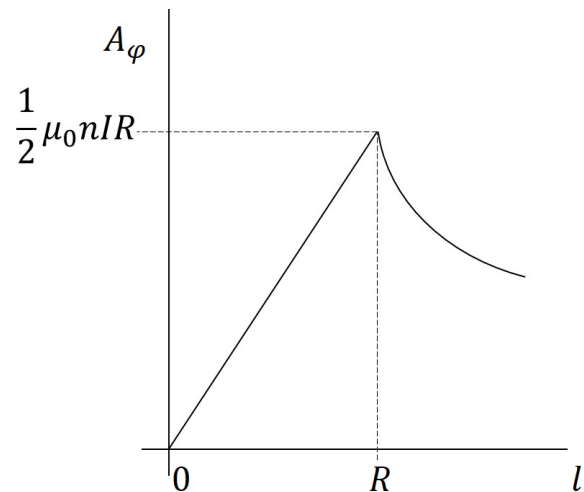
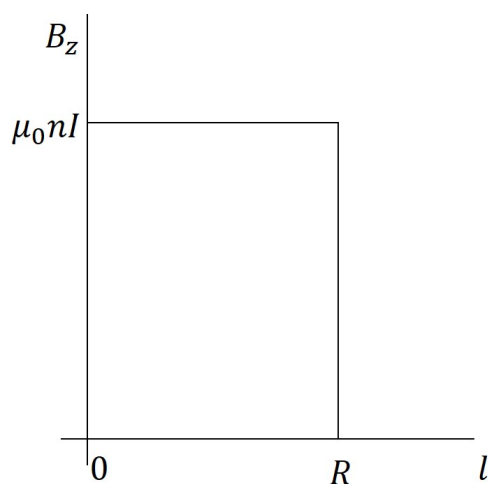
$$\nabla \times \vec{A} = \vec{B} \rightarrow \hat{n} \times (\vec{A}_2 - \vec{A}_1) = \lim_{h \rightarrow 0} (h \cdot \vec{B}) = 0$$

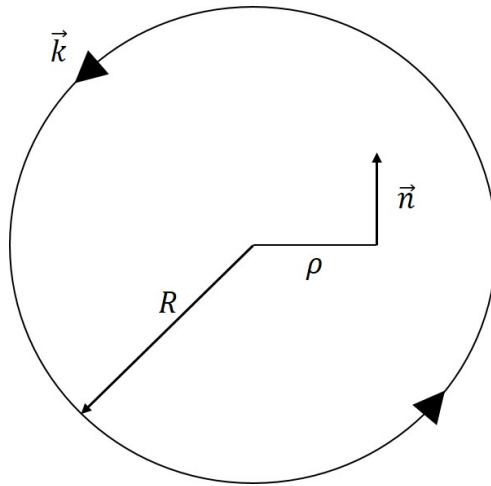
ya que \vec{B} debe permanecer finito a medida que el grosor de la capa de transición se reduce a cero.

Las componentes tangenciales de \vec{A} son también continuas

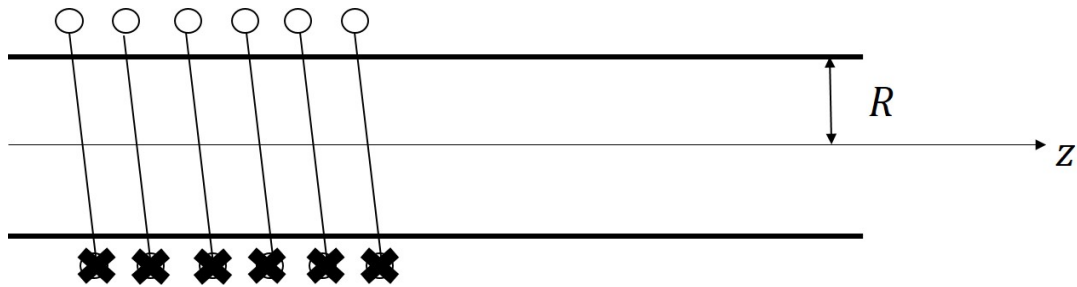
$$\vec{A}_2 = \vec{A}_1 \rightarrow \begin{cases} A_{n2} = A_{n1} \\ A_{t2} = A_{t1} \end{cases}$$

Campo de un solenoide infinito





$n \rightarrow$ número de vueltas por unidad de longitud



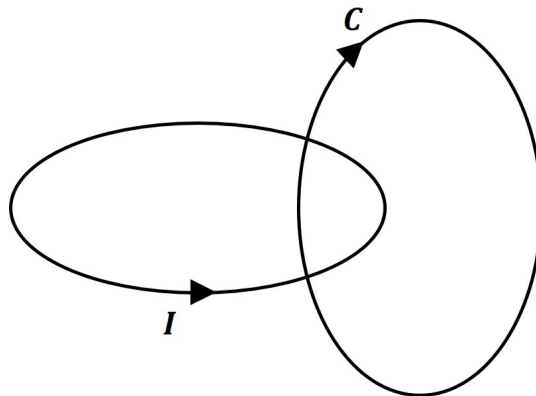
Potencial escalar magnético

Si $\vec{j} = 0$ en una cierta región $\rightarrow \nabla \times \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B} = \mu_0 \nabla \phi_m$

Como $\nabla \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \nabla^2 \phi_m = 0$,

el potencial escalar magnético ϕ_m cumple la ecuación de Laplace.

El potencial escalar magnético está multivaluado:



$C \rightarrow$ Curva cerrada que rodea la espira sin tocarla

- 1) $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\mu_0 \oint_C \nabla \phi_m d\vec{l} = \mu_0 (\phi_m(\vec{r}_i) - \phi_m(\vec{r}_f))$.
- 2) Aplicando la ley circuital de Ampère:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I.$$

Por lo tanto

$$\phi_m(\vec{r}_i) - \phi_m(\vec{r}_f) = I$$

el potencial escalar magnético al empezar a recorrer la curva C y al finalizarla no tiene el mismo valor.

*Nótese que el potencial escalar magnético se mide en amperios.

Aclaración sobre las condiciones de frontera

- 1) Componentes normales

$$\vec{n} \cdot (\vec{F}_2 - \vec{F}_1) = \lim_{h \rightarrow 0} (h \nabla \vec{F})$$

Como $\hat{n} \cdot \vec{F} = F_n$, se obtiene:

$$F_{n2} - F_{n1} = \lim_{h \rightarrow 0} (h \nabla \vec{F})$$

- 2) Componentes tangenciales

Si $\vec{F} = \vec{F}_n + \vec{F}_t = F_n \hat{n} + \vec{F}_t \rightarrow \hat{n} \times \vec{F} = F_n (\hat{n} \times \hat{n}) + \hat{n} \times \vec{F}_t = \hat{n} \times \vec{F}_t$.

Con lo cual,

$$\hat{n} \times (\vec{F}_2 - \vec{F}_1) = \lim_{h \rightarrow 0} h \nabla \times \vec{F} \rightarrow \hat{n} \times (\vec{F}_{t2} - \vec{F}_{t1}) = \lim_{h \rightarrow 0} [h \cdot \nabla \times \vec{F}]$$

Teniendo en cuenta que $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$,

se obtiene que $(\hat{n} \times \vec{F}) \times \hat{n} = \vec{F} - F_n \vec{n} = \vec{F}_t$

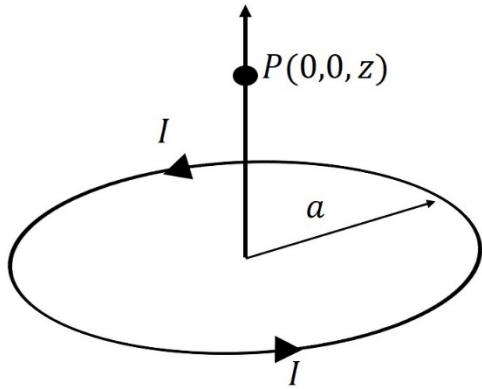
Por lo tanto,

$$\vec{F}_{t2} - \vec{F}_{t1} = \lim_{h \rightarrow 0} \{h [(\nabla \times \vec{F}) \times \hat{n}]\}$$

Ejercicio ejemplo

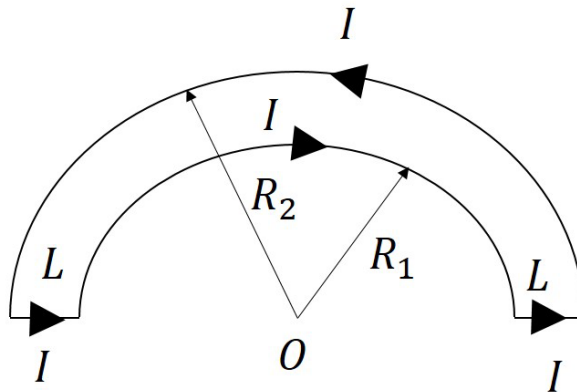
Calcúlese el campo \vec{B} generado por los siguientes circuitos en el punto O.

Nota: Para resolverlos, es conveniente recordar que el valor del campo \vec{B} de una espira circular en un punto $(0, 0, z)$ atende a la siguiente fórmula



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \hat{z}$$

1)



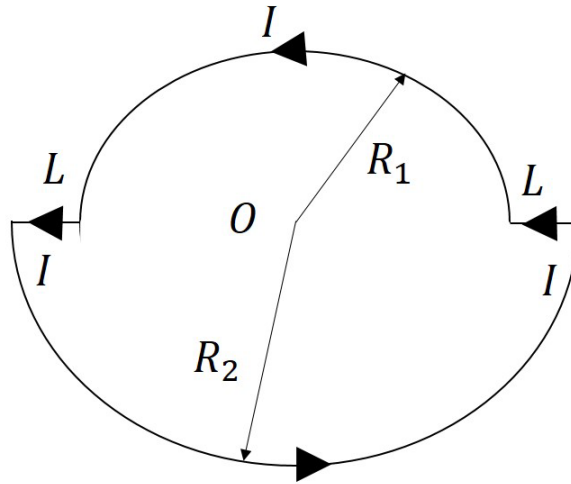
Recordemos que la Ley de Biot-Savart sería

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C'} \frac{d\vec{l}' \times \hat{R}}{R^2}; \vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

Para resolver los problemas que aquí se discuten, se aplicará el principio de superposición de los campos generados por las semicircunferencias R_1 y R_2 , además de los elementos lineales.

Para calcular el campo en O, tomaremos en consideración solamente los tramos circulares, que son semicircunferencias. Los tramos lineales no generan campo, ya que el producto $I d\vec{l}' \times (\hat{r} - \hat{r}') = \vec{0}$ en estos tramos de longitud L.

2)

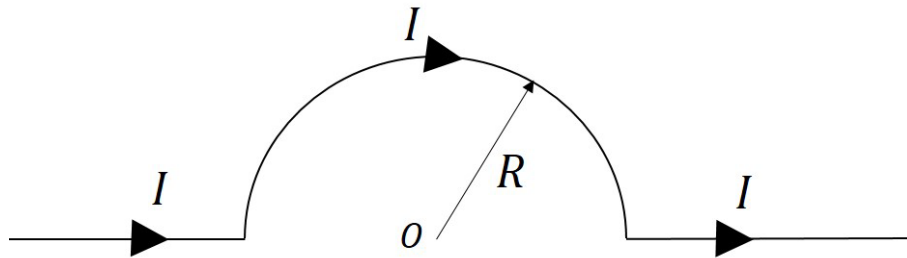


Tal y como se ha explicado anteriormente, se aplicará el principio de superposición y, de nuevo, los segmentos de longitud L no contribuyen al campo total. Por lo tanto,

$$\vec{B} = B_{R_1} + B_{R_2} = \frac{\mu_0 I}{4} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \hat{z} = \frac{\mu_0 I}{4} \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \right) \hat{z}$$

En este caso, las contribuciones se suman ya que aplicando la regla de la mano derecha los campos de R_1 y R_2 llevan la misma dirección y sentido $+z$.

3)



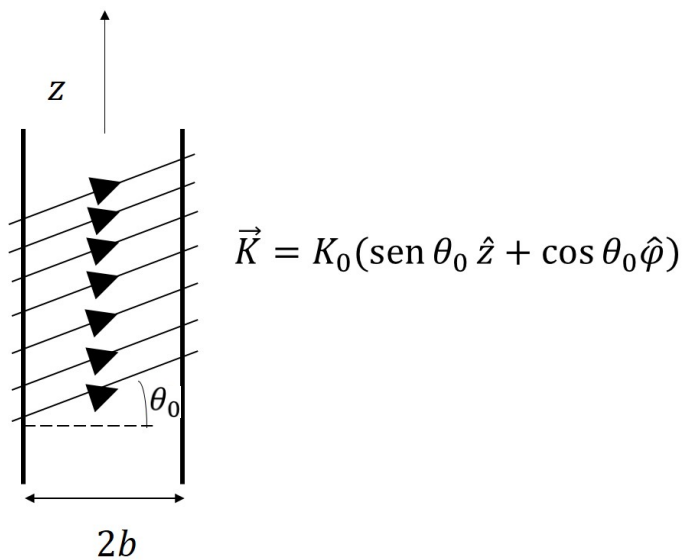
Los tramos lineales semi-infinitos no producen campo en O (ya calculado para los ejemplos anteriores):

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4a} \hat{z}$$

Material a exponer por las/los alumnas/alumnos

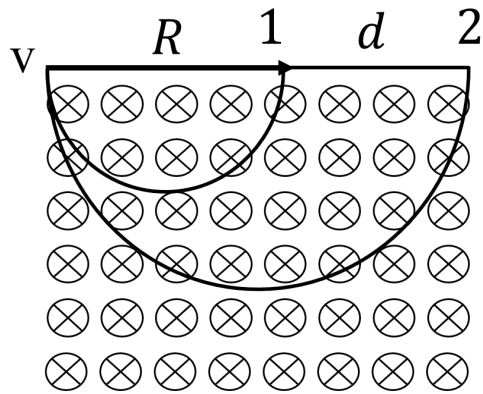
1. Campo B de una línea finita.
2. Campo B de una espira circular.
3. Campo B de un solenoide ideal.
4. Cargas puntuales en movimiento (campo B).
5. Campo B de un toroide mediante la forma integral de Ampere.
6. Potencial vectorial de un solenoide infinitamente largo.

Aproximación de corrientes reales en un solenoide.



EJEMPLOS RESUELTOS DE EJERCICIOS DE EXAMEN

1. Un estrecho haz de protones de diferentes velocidades penetra en un campo magnético uniforme de módulo B , que es perpendicular al plano del haz. ¿Qué velocidades deben tener los protones para que produzcan impacto en la lámina de longitud d , colocada a una distancia R de la entrada del haz, como se indica en la figura?



Al entrar los protones en el campo magnético experimentan una fuerza $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ que es, en cada instante, perpendicular a \vec{v} y \vec{B} . Por lo tanto, los protones describen arcos de circunferencia de radio r , de modo que se verifica

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \rightarrow v = \frac{qBr}{m}$$

Para que se produzca el impacto en el punto 1, la velocidad de los protones deberá ser

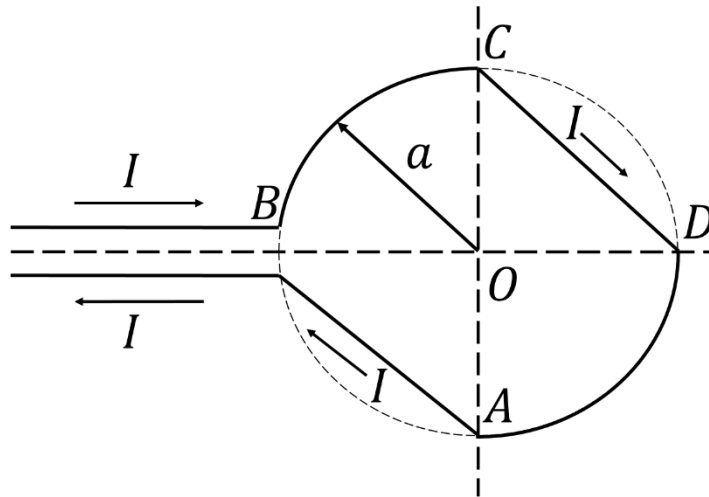
$$v_1 = \frac{qB}{m} \cdot \frac{R}{2}$$

Para que se produzca el impacto en el punto

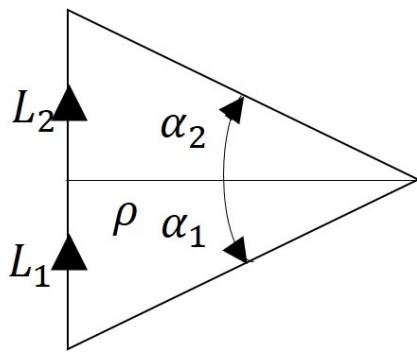
$$v_2 = \frac{qB}{m} \cdot \frac{(R + d)}{2}$$

Los protones con velocidades comprendidas entre v_1 y v_2 producirán impactos en la lámina.

- 2. El circuito de la figura sigue los arcos y cuerdas de una circunferencia de radio a . Calcular el valor de B en el centro de la circunferencia, cuando la corriente es I .**

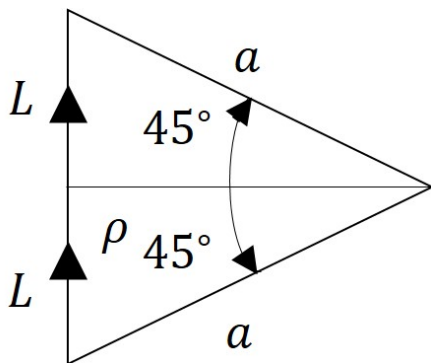


Sabemos que el campo B de una línea finita de corriente recta y finita viene dada por



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} (\text{sen } \alpha_1 + \text{sen } \alpha_2) \hat{\phi}$$

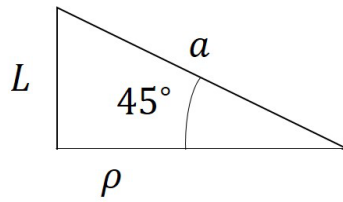
En nuestro caso, $L_1 = L_2 = L$. Por lo tanto, la contribución de cada línea será



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} (\text{sen } 45^\circ + \text{sen } 45^\circ) \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{4\pi\rho} \hat{\phi}$$

$$\text{sen } 45^\circ = \text{cos } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Podemos calcular ρ del dibujo anterior

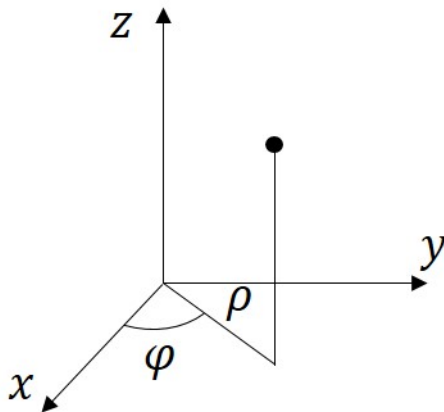


$$\cos 45^\circ = \frac{\rho}{a} \rightarrow \rho = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Sustituyendo en la expresión de \vec{B} para cada línea

$$\vec{B}_{AB} = \vec{B}_{CD} = \frac{\mu_0 I \sqrt{2}}{4\pi \frac{a\sqrt{2}}{2}} \hat{\varphi} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{\varphi}$$

Considerando que el plano YZ ($X=0$) es el plano donde descansa el circuito. Consideremos coordenadas cilíndricas



$$\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{x} + \cos \varphi \hat{y}$$

$$\text{Plano } yz \rightarrow \varphi = 90^\circ$$

$$\hat{\varphi} = -\hat{x}$$

Por lo tanto, la contribución de cada triángulo, vendrá dada por

$$\vec{B}_{AB} = \vec{B}_{CD} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{x}$$

y la contribución de ambos tramos será

$$\vec{B}_{AB} + \vec{B}_{CD} = -\frac{\mu_0 I}{\pi a} \hat{x}$$

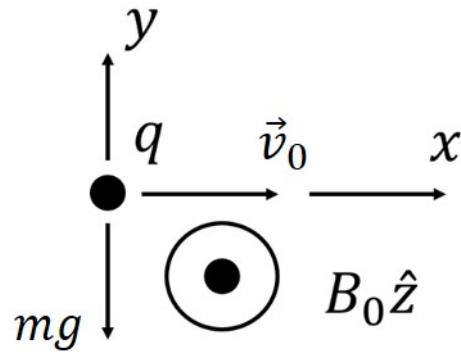
Las contribuciones de los tramos BC y DA corresponden a la mitad de una espira completa

$$\vec{B}_{BC} + \vec{B}_{DA} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 I}{2a} \hat{x}$$

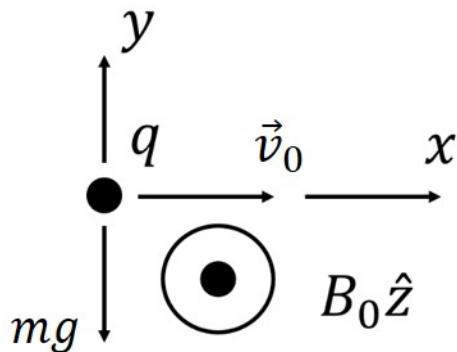
$$\frac{1}{4} \vec{B} \text{ espira} \rightarrow \vec{B}_{BC} = \vec{B}_{DA} = -\frac{\mu_0 I}{8a} \hat{x}$$

$$\vec{B}_T = -\frac{\mu_0 I}{a} \left(\frac{4 + \pi}{4\pi} \right) \hat{x}$$

3. Una carga q que está afectada por un campo magnético $B_0 \hat{z}$ presenta una velocidad inicial $v_0 \hat{x}$. Esta misma carga también vendría afectada por un campo gravitatorio $-g \hat{y}$, ya que cuenta con una masa m . ¿Qué valor de B_0 mantendrá a la partícula moviéndose con velocidad constante en dirección \hat{x} ?



Solución



Para que la carga se mueva en línea recta a lo largo del eje OX ha de verificarse

$$\sum F_y = 0$$

La fuerza magnética sobre la carga q será

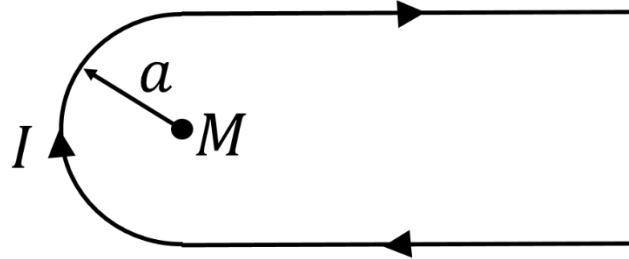
$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B} = q(v_0 \hat{x} \times B_0 \hat{z}) = qv_0 B_0 (\hat{x} \times \hat{z}) = -qv_0 B_0 \hat{y}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 &\rightarrow -(qv_0 B_0 + mg) \hat{y} = \vec{0} \\ &\rightarrow +qv_0 B_0 + mg = 0 \rightarrow B_0 = -\frac{mg}{qv_0} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\vec{B} = B_0 \hat{z} = -\frac{mg}{qv_0} \hat{z}$$

4. Determinar el valor de la inducción magnética \vec{B} en el punto M del circuito de la figura por el que circula una corriente I .

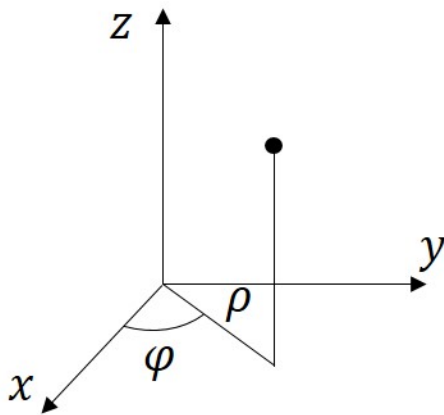


Solución

El campo se puede calcular como la superposición de una semicircunferencia y dos segmentos de corriente.

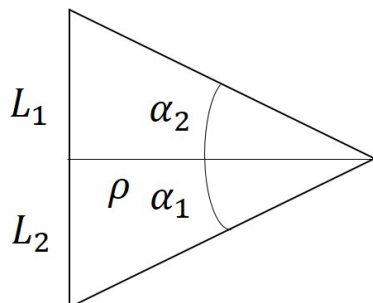
Consideremos que el plano donde descansa el circuito es el plano yz .

Como ya se ha discutido en anteriores ejercicios



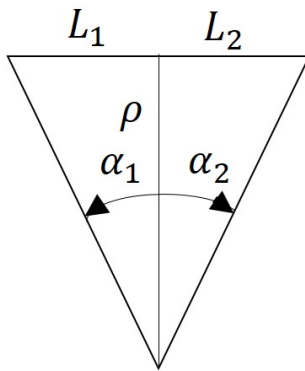
$$\hat{\phi} = -\text{sen } \varphi \hat{x} + \text{cos } \varphi \hat{y}$$

Además, la contribución de cada segmento será



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} (\text{sen } \alpha_1 + \text{sen } \alpha_2) \hat{\phi}$$

Particularizando para nuestro caso



$$L_1 \rightarrow 0 \leftrightarrow \alpha_1 \rightarrow 0$$

$$L_2 \rightarrow \infty \leftrightarrow \alpha_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\rho = a$$

$$\vec{B}_{segmento} = \frac{\mu_0 I}{4\pi\rho} \hat{\phi}$$

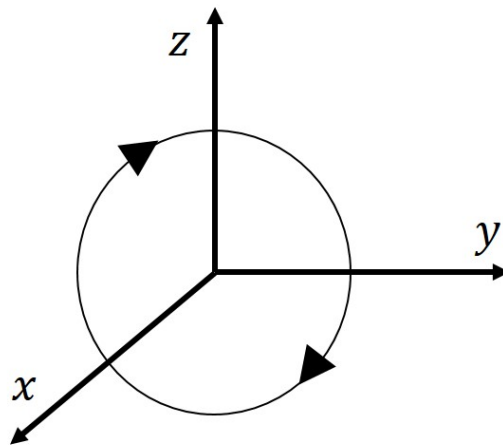
(coincide con la mitad del campo generado por una línea infinita de corriente)

$$\text{En el plano } YZ \text{ (} x = 0 \text{)} \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow \hat{\phi} = -\hat{x}$$

$$\vec{B}_{segmento} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi a} \hat{x}$$

El campo de una espira completa que descansa en el plano YZ ($X = 0$), viene dado por

$$\vec{B}(x = 0) = -\frac{\mu_0 I}{2a} \hat{x} \rightarrow \text{Con corriente en sentido horario}$$



En nuestro caso, es una semicircunferencia,

$$\vec{B}_{semicircunferencia} = -\frac{\mu_0 I}{4a} \hat{x}$$

El campo total será

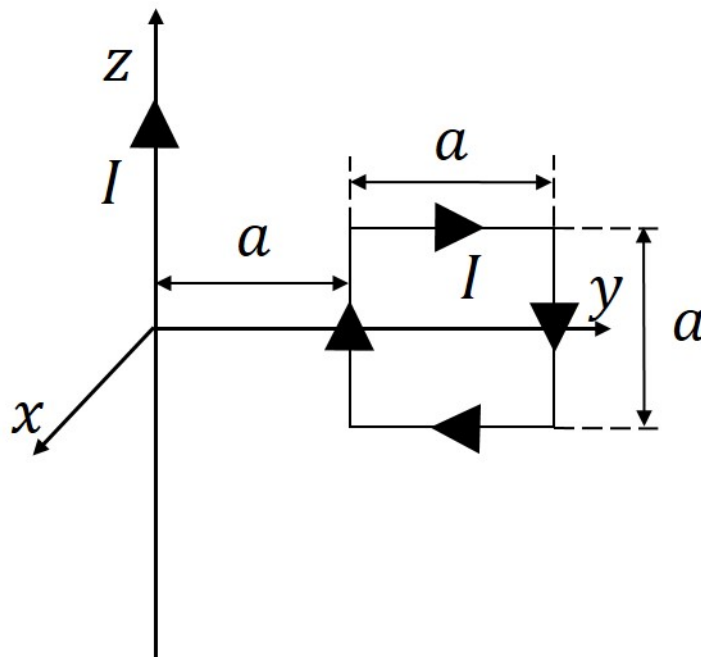
$$\vec{B}_T = 2 \times \vec{B}_{segmento} + \vec{B}_{semicircunferencia} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{x} - \frac{\mu_0 I}{4a} \hat{x} = -\frac{\mu_0 I}{2a} \cdot \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\right) \hat{x}$$

5. ¿Una partícula cargada puede permanecer inmóvil bajo la acción de un campo eléctrico y un campo magnético convenientemente ajustados?

Solución

No es posible para una partícula inmóvil, la fuerza magnética es nula y no puede compensar la fuerza eléctrica.

6. Tenemos un hilo indefinido coincidente con el eje z, por el que circula una corriente I. A una distancia a se sitúa una espira cuadrada de lado a, como muestra la figura. Por dicha espira circula una corriente I. Calcúlese la fuerza que ejerce el campo magnético creado por la corriente del hilo indefinido sobre la espira cuadrada.



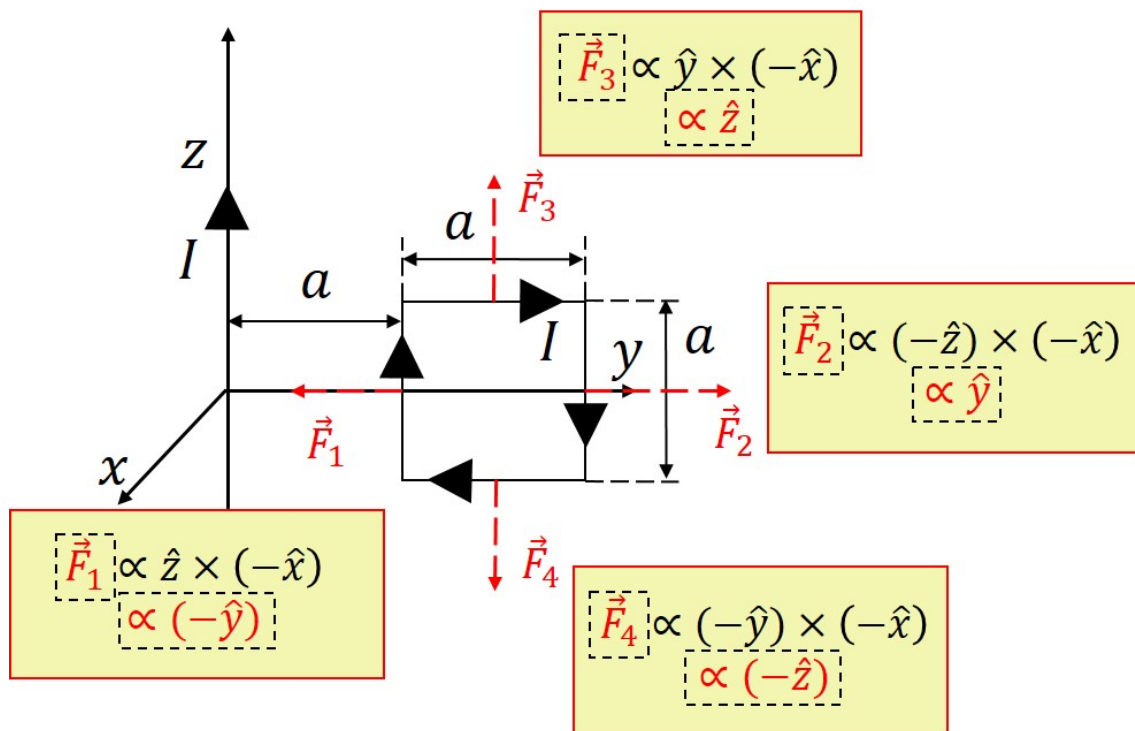
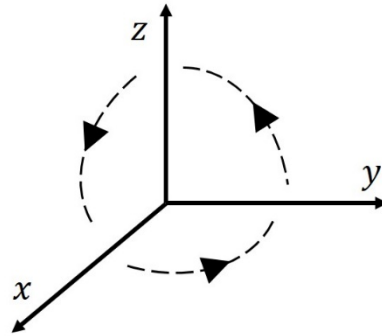
Solución

Para poder realizar una explicación más pormenorizada del ejercicio, se explicitan a continuación las diferentes integraciones para cada uno de los tramos involucrados en el cálculo. De este modo, podrán entenderse las particularidades de la integración de las

líneas de la espira debido a la posición que éstas presentan con respecto a la línea de corriente.

Aclaración que puede ser de utilidad

Como regla para la asignación de signos en el problema, debido a los diferentes productos vectoriales presentes en el mismo, se puede seguir el protocolo de recorrer los ejes coordenados en sentido horario, como indica la siguiente figura.



Sabiendo que la expresión de \vec{B} para un hilo infinito de carga es

$$\vec{B}_{\text{hilo infinito}} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} \hat{x},$$

ya que $\hat{\phi} = -\hat{x}$ ($\hat{\phi} = -\sin\phi \hat{x} + \cos\phi \hat{y}$) debido a que (en el plano YZ) $\phi = \pi/2$.

Cálculo de \vec{F}_1

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= I \int_L d\vec{l} \times \vec{B} = I \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dz \hat{z} \times \left(-\frac{\mu_0 I^2}{2\pi a} \hat{x} \right) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dz (\hat{z} \times \hat{x}) \\ &= -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} (+\hat{y}) \cdot a = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \hat{y}\end{aligned}$$

Cálculo de \vec{F}_2

$$\vec{F}_2 = -I \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dz \hat{z} \times \left(-\frac{\mu_0 I^2}{2\pi \cdot 2a} \hat{x} \right) = +\frac{\mu_0 I^2}{4\pi a} \cdot a (\hat{z} \times \hat{x}) = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \hat{y}$$

Aclaración: Se podría haber resuelto también a través de las fórmulas siguientes (teniendo en cuenta que en los tramos verticales, el campo \vec{B} es constante:

$$\vec{F} = I \left[\int_L d\vec{l} \right] \times \vec{B} = I\vec{L} \times \vec{B}$$

$$\vec{F}_1 = Ia\hat{z} \times \vec{B}(a); \quad \vec{F}_2 = -Ia\hat{z} \times \vec{B}(2a)$$

Cálculo de \vec{F}_3

$$\vec{F}_3 = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \int_a^{2a} \frac{dy}{y} [\hat{y} \times (-\hat{x})] = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{2a}{a}\right) \hat{z} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \cdot \ln(2) \hat{z}$$

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi y} \hat{x}$$

Cálculo de \vec{F}_4

$$\vec{F}_4 = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \int_a^{2a} \frac{dy}{y} [(-\hat{y}) \times (-\hat{x})] = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{2a}{a}\right) \cdot (-\hat{z}) = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \cdot \ln(2) \hat{z}$$

Por lo tanto, vemos como $\vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{0}$.

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, la fuerza total sobre la espira cuadrada será:

$$\vec{F}_T = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi} \hat{y} + \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \hat{y} = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \hat{y}$$

Esta fuerza tira de la espira hacia el hilo indefinido.

Aclaración: En los tramos horizontales (i.e., perpendiculares al hilo indefinido) la fuerza es del mismo módulo pero de sentido opuesto en el lazo superior con respecto al inferior. En consecuencia la suma de fuerzas sobre estos lados se anula.

7. Un electrón y un protón con la misma energía cinética describen trayectorias circulares en un mismo campo magnético uniforme.

- a. ¿Cuál tiene la trayectoria de mayor radio?
- b. ¿Cuál tiene la mayor velocidad?
- c. ¿Cuál tiene el mayor período de revolución?

DATOS: $\frac{m_p}{m_e} = 1836, \sqrt{1836} = 42.849 \approx 43$

Solución

a. Como ambas partículas presentan la misma energía cinética, se cumple que

$$E_{cp} = E_{ce} \rightarrow \frac{1}{2} m_p v_p^2 = \frac{1}{2} m_e v_e^2$$
$$v_e^2 = \frac{m_p}{m_e} v_p^2 = 1836 v_p^2 \rightarrow v_e = \sqrt{1836} v_p \rightarrow v_e \approx 43 v_p$$
$$R_p = \frac{m_p v_p}{|q| \cdot B} = \frac{1836 m_e \frac{v_e}{\sqrt{1836}}}{|q| \cdot B} = \sqrt{1836} \frac{m_e v_e}{|q| \cdot B}$$

Por lo tanto, $R_p \approx 43 R_e$. Con lo cual, el radio de la trayectoria descrita por el protón es mayor.

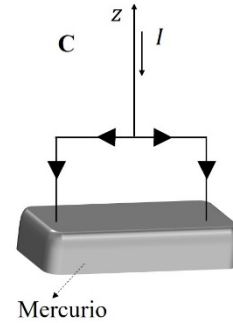
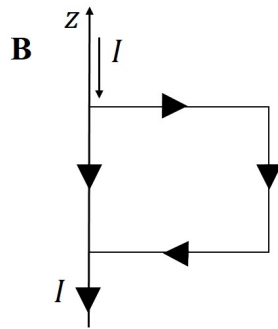
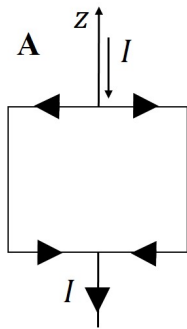
b. En vista del resultado anterior, el electrón tiene mayor velocidad que el protón.

c. Calculamos el período del protón como

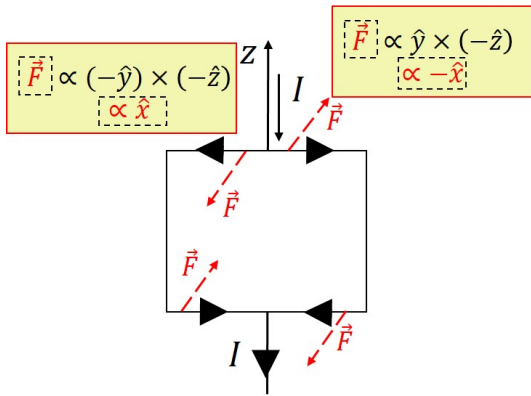
$$T_p = \frac{1}{f_p} = \frac{2\pi m_p}{|q| \cdot B} = 1836 \cdot \frac{2\pi m_e}{|q| \cdot B} = 1836 \cdot T_e$$

Por lo tanto, podemos confirmar como el período del protón es mayor que el del electrón.

8. Tenemos tres tipos de espiras, situadas en un campo magnético $B = -B_0\hat{z}$. Las tres soportan una corriente I , y pueden girar alrededor del eje z . ¿Cuál de las tres gira? Razona la respuesta.

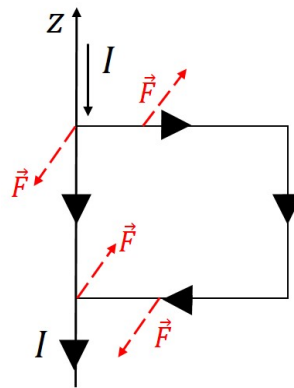


Solución



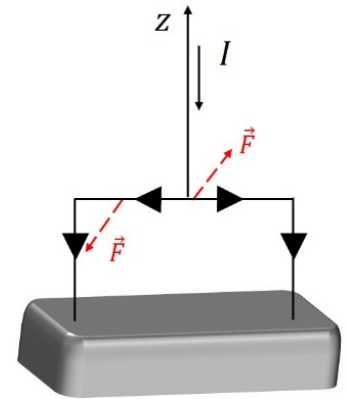
No gira

Presenta pares de fuerzas que tienen sentidos opuestos.



No gira

Presenta pares de fuerzas que tienen sentidos opuestos.



Gira

La fuerza sobre un elemento de corriente en presencia de un campo \vec{B} viene dado por la ecuación

$$d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$$

La fuerza sobre los tramos paralelos es nula, ya que $d\vec{l}$ es paralelo a \vec{B} .

En la espira C se dispersa la corriente en el mercurio, que no está unido rígidamente a la espira. Por tanto, mercurio y espira son independientes en su movimiento.